



Politechnika Łódzka



wydział
elektrotechniki
elektroniki
informatyki
i automatyki

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Piotr Leśniewski

**Dyskretne ślizgowe sterowanie wybraną klasą
obiektów z opóźnieniem w torze wejściowym**

Promotor

Prof. dr hab. inż. Andrzej Bartoszewicz

Łódź, 2016

1. Wstęp

Głównym założeniem sterowania ślizgowego jest ograniczenie trajektorii stanu układu do hiperpowierzchni w przestrzeni stanu. Hiperpowierzchnia ta jest tak dobierana, aby w trakcie ruchu po niej punktu opisującego, układ zamknięty posiadał pożądaną dynamikę. Poniżej przypomniane zostanie znaczenie pewnych podstawowych pojęć z zakresu teorii sterowania. Stan układu dynamicznego, oznacza najmniej liczny zbiór sygnałów, który należy określić dla danej chwili, aby znając przyszłe wartości sygnałów sterujących możliwe było jednoznaczne określenie zachowania się układu dla wszystkich kolejnych chwil. Poszczególne z tych sygnałów nazywane są zmiennymi stanu. W przypadku układów elektromechanicznych mogą być one wybrane jako prędkości i położenia. W przeanalizowanych w mojej pracy systemach logistycznych, jest to ilość towarów w magazynie oraz wielkości niezrealizowanych zamówień. Liczba zmiennych stanu, zależna od stopnia skomplikowania danego systemu, zwykle oznaczana jest literą n . Przestrzeń stanu określa się jako n -wymiarową przestrzeń, której kolejnymi współrzędnymi są zmienne stanu. W takim opisie każdemu stanowi panującemu w rozważanym systemie w danym momencie, można jednoznacznie przyporządkować pojedynczy punkt (tzw. punkt opisujący) w przestrzeni stanu. Dynamicznemu zachowaniu układu w określonym przedziale czasu odpowiada natomiast trajektoria w przestrzeni stanu.

Stanem zadany układu nazywamy stan, który powinien zostać osiągnięty. Może to być np. określona konfiguracja przestrzenna manipulatora przemysłowego (wraz z wartościami prędkości złączowych równych zero) pozwalająca na uchwycenie kolejnego elementu. Uchybem jest natomiast różnica między stanem zadany, a aktualnym stanem systemu. Najczęściej spotykanym zadaniem w automatyce jest dobór regulatora dla układu zamkniętego, który na podstawie znajomości uchybu wygeneruje sygnał sterujący, doprowadzający system do stanu zadanego. Sygnałem sterującym mogą być np. napięcia zasilające silniki elektryczne w układach elektromechanicznych. Liczbę sygnałów sterujących w układzie zwykle oznacza się literą m . Zdecydowanie rzadziej spotyka się układy otwarte, w których zmienne stanu nie są mierzone, a sygnał sterujący zostaje wyznaczony tylko na podstawie stanu zadanego. Czysto teoretycznie, jeśli dysponowalibyśmy dokładnym modelem układu, to możliwe byłoby wyznaczenie takiego przebiegu sygnału sterującego, który doprowadzi układ do stanu zadanego. W praktyce jednak, w każdym układzie występują zakłócenia, takie jak np. tarcie, czy zmienne obciążenie. Bez wykorzystania sprzężenia zwrotnego, zakłócenia te nie mogą zostać odpowiednio skompensowane, powodując, że stan zadany w układzie otwartym nie zostanie osiągnięty.

Układy dynamiczne mogą być opisane w czasie ciągłym lub dyskretnym. Opis w czasie ciągłym oznacza, że wartość wektora stanu jest określona dla każdej chwili. Posługujemy się wtedy równaniami różniczkowymi, wiążącymi pochodne zmiennych stanu z wartościami tych zmiennych oraz z sygnałami zakłócenia i sterowania. Przykładem opisu w czasie ciągłym może być temperatura wody w bojlerze regulowana przez termostat. Sygnały opisane w czasie dyskretnym są określone wyłącznie w dyskretnych momentach. Dynamika układu jest wtedy przedstawiona za pomocą równań różnicowych, wyrażających wartości sygnałów w chwilach następnych jako funkcje wartości sygnałów w chwili obecnej. Potrzeba takiego opisu wynika z wprowadzenia cyfrowych urządzeń (mikrokontrolerów, sterowników PLC itp.) do pętli sterowania. Algorytm sterowania w takich urządzeniach może być w skrócie opisany w trzech krokach. Pierwszym krokiem jest otrzymanie pomiarów

dokonanych przez czujniki. Następnie, na otrzymanych wartościach dokonywane są pewne operacje matematyczne, określone w trakcie projektowania regulatora. Ostatecznie wyznaczony sygnał sterujący jest wysyłany do aktuatorów oddziałujących na obiekt. Oznacza to, że sygnał sterujący może być wyznaczony tylko co pewien, ograniczony z dołu przez możliwości sprzętowe procesora, czas T (okres dyskretyzacji). W większości przypadków sygnał sterujący wykorzystany jest następnie do sterowania obiektem ciągłym, co oznacza, że jego wartość musi być przekształcona do czasu ciągłego. Najczęściej stosowany jest wtedy ekstrapolator zerowego rzędu (ang. zero order holder, ZOH), który utrzymuje stałą wartość sygnału sterującego wyznaczoną w chwili kT aż do chwili $(k+1)T$, w której będzie wyznaczona następna wartość sterowania.

Kolejnym kryterium określającym systemy dynamiczne jest podział na układy liniowe i nieliniowe. W układach liniowych równania różniczkowe/różnicowe zawierają wyłącznie liniowe funkcje zmiennych stanu i sterowania. W układach nieliniowych, występują również nieliniowe funkcje tych zmiennych. Nieliniowość może być związana z samym obiektem. Często stosowanym przykładem dydaktycznym jest problem stabilizacji odwróconego wahadła, w którym występują funkcje trygonometryczne. Nieliniowość może również wynikać z zastosowania nieliniowego regulatora, którego przykładem jest regulator ślizgowy.

Jedną z technik projektowania regulatorów jest sterowanie ślizgowe. Metoda ta jest od dawna stosowana w automatyce. Jej podstawy zostały opracowane w latach 50-tych i 60-tych ubiegłego wieku przez badaczy rosyjskich [5]. Największą zaletą tej metody jest jej duża odporność na zakłócenia [4]. Główną ideą sterowania ślizgowego jest wybór tzw. hiperpłaszczyzny przełączeń w przestrzeni stanu, do której za pomocą odpowiednio wybranego sygnału sterującego będziemy chcieli ograniczyć ruch punktu opisującego. Płaszczyzna ta jest najczęściej opisywana następującym równaniem

$$s(kT) = \mathbf{c}^T \mathbf{e}(kT) = 0, \quad (1)$$

w którym $s(kT)$ jest tzw. zmienną ślizgową, \mathbf{c} to wektor parametrów dobrany tak, aby spełnić warunek $\mathbf{c}^T \mathbf{b} \neq 0$, a $\mathbf{e}(kT) = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}(kT)$ oznacza uchyb układu zamkniętego. Dobór wektora parametrów \mathbf{c} będzie miał istotne znaczenie dla właściwości otrzymanego układu zamkniętego. Wyboru tego można dokonać np. metodą lokowania biegunów lub jedną z metod sterowania optymalnego. Następnym zadaniem jest takie zaprojektowanie regulatora, aby punkt opisujący, z dowolnego możliwego położenia (odpowiadającego warunkom początkowym panującym w układzie), w trakcie fazy osiągnięcia trybu ślizgowego, w skończonym czasie zbiegał do hiperpłaszczyzny. Następnie, w trakcie fazy ślizgowej, punkt opisujący powinien pozostać na hiperpłaszczyźnie lub w możliwie najmniejszym jej otoczeniu, do końca procesu sterowania. Właśnie od tego „ślizgania” się po płaszczyźnie pochodzi nazwa sterowania ślizgowego. W tym momencie można zauważyć jedną z zalet sterowania ślizgowego: jeżeli uda nam się wymusić w układzie idealny ruch ślizgowy, to w jego trakcie, zachowanie układu nie zależy od wartości działających na niego zakłóceń. Ponadto, opis dynamiki jest uproszczony, ponieważ ograniczyliśmy ruch punktu opisującego do płaszczyzny, zmniejszając w ten sposób rząd rozważanego systemu.

2. Reguły osiągnięcia trybu ślizgowego

W klasycznym sterowaniu ślizgowym, projektowanie algorytmu sterowania rozpoczyna się od doboru płaszczyzny ślizgowej, zapewniającej pożądane właściwości

dynamiczne układu w trakcie ruchu ślizgowego. Następnie, proponowany jest regulator ślizgowy. Ostatnim krokiem jest udowodnienie, że zastosowanie tego regulatora zapewnia zbieżność i istnienie stabilnego ruchu ślizgowego. Pewną wadą tej metody jest to, że nie zapewnia ona kontroli dynamiki układu w trakcie fazy osiągnięcia trybu ślizgowego. Oznacza to, że zakłócenia działające na układ mogą spowodować wykroczenie poza dopuszczalny stan pracy układu (np. przekroczenie dopuszczalnych prędkości obrotowych skutkujące uszkodzeniem mechanicznym silnika). Alternatywną metodą projektowania regulatorów ślizgowych jest wykorzystanie tzw. predefiniowanego przebiegu zmiennej ślizgowej, które to podejście zastosowałem w mojej rozprawie. Kolejność działań w tej metodzie jest w pewnym sensie odwrotna do tej w poprzednim podejściu. Zaczyna się bowiem od określenia pożądanego sposobu w jaki zmienna ślizgowa zbiega do zera, co odpowiada fazie osiągnięcia trybu ślizgowego. Najczęściej zbieżność ta dla układów dyskretnych zdefiniowana jest przez podanie zależności między aktualną wartością zmiennej ślizgowej, a jej wartością w następnej chwili dyskretyzacji. Dla układów ciągłych należy natomiast określić pochodną zmiennej ślizgowej jako funkcję wartości tej zmiennej. Drugim etapem jest wykorzystanie równań opisujących dany system do zaprojektowania regulatora, który zapewni pożądaną przebieg zmiennej ślizgowej. Oczywiście, zakłócenia nadal będą miały pewien wpływ na zachowanie układu w trakcie fazy osiągnięcia trybu ślizgowego. Jednak, dzięki wykorzystaniu predefiniowanego przebiegu zmiennej ślizgowej, można w łatwy sposób ograniczyć szybkość zbieżności tej zmiennej. W wielu układach pozwala to na spełnienie ograniczeń związanych z rzeczywistym obiektem (np. wcześniej wspomnianego ograniczenia prędkości obrotowej).

3. Reguły osiągnięcia trybu ślizgowego w dziedzinie czasu ciągłego

Predefiniowany przebieg zmiennej ślizgowej został po raz pierwszy zaproponowany w artykule [6] dla układów ciągłych. W artykule tym zaprojektowane zostały trzy przykładowe reguły:

- 1) Reguła o stałej szybkości zbieżności (ang. constant rate reaching), w której $\dot{s}(t) = -Q \operatorname{sgn}[s(t)]$.
- 2) Reguła o szybkości zbieżności będącej sumą wyrażen: stałego oraz proporcjonalnego do wartości zmiennej ślizgowej (ang. constant plus proportional rate reaching), czyli $\dot{s}(t) = -Q \operatorname{sgn}[s(t)] - Ks$.
- 3) Reguła o potęgowej szybkości zbieżności (ang. power rate reaching): $\dot{s}_i(t) = -k_i |s_i(t)|^\alpha \operatorname{sgn}[s_i(t)]$, gdzie parametr $\alpha \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

W powyższych wzorach Q i K oznaczają diagonalne macierze o wymiarach $m \times m$, których elementy znajdujące się na diagonalu są większe od zera, $s(t)$ reprezentuje wektor zmiennych ślizgowych, k_i oznacza wzmocnienie związane z i -tą zmienną ślizgową.

4. Reguły osiągnięcia trybu ślizgowego w dziedzinie czasu dyskretnego

W dzisiejszych czasach niemal wszystkie algorytmy sterowania są implementowane w urządzeniach cyfrowych. Z tego powodu, podejście przedstawione w artykule [6] zostało w pracy [7] przekształcone dla zastosowania w układach dyskretnych. Ponieważ w układach dyskretnych idealny ruch ślizgowy jest niemożliwy, w artykule [7] przyjęto wymaganie ruchu quasi-ślizgowego, zdefiniowanego następująco:

- 1) Punkt opisujący układ, z każdego możliwego położenia początkowego, powinien poruszać się monotonicznie w kierunku płaszczyzny ślizgowej i w skończonym czasie przeciąć ją.
- 2) Po pierwszym przekroczeniu płaszczyzny ślizgowej, punkt opisujący powinien ją przekraczać w każdym kolejnym kroku dyskretyzacji.
- 3) Amplituda wynikających z pkt. 2 oscylacji nie może narastać, przez co trajektoria układu pozostaje w znanym z góry otoczeniu płaszczyzny.

Następnie, przeanalizowany został przypadek, w którym wymagana szybkość zmian zmiennej ślizgowej jest sumą wyrażenia proporcjonalnego do jej wartości i stałego parametru (czyli odpowiednika drugiej reguły opracowanej w pracy [6]). Przebieg zmiennej s dla układu bez zakłóceń jest opisany równaniem

$$s[(k+1)T] = (1-qT)s(kT) - \varepsilon T \operatorname{sgn}[s(kT)], \quad (2)$$

gdzie $\varepsilon > 0$ i $q \in (0, 1/T)$ są parametrami. Natomiast dla układu z zakłóceniami i niepewnościami modelu przebieg zmiennej ślizgowej opisuje zależność

$$s[(k+1)T] = (1-qT)s(kT) - (\varepsilon + S_2 + F_2) \operatorname{sgn}[s(kT)] + \tilde{S} + \tilde{F} - S_1 - F_1, \quad (3)$$

gdzie \tilde{S} , \tilde{F} oznaczają nieznanne wpływy niepewności modelowania i zakłóceń zewnętrznych na zmienną ślizgową, S_1 , F_1 reprezentują średnie wartości tych wyrazów, a S_2 , F_2 oznaczają maksymalne odstępstwa od średnich wartości.

W artykule [2] pokazano, że parametry reguły przedstawionej w pracy [7] muszą spełniać warunek

$$\frac{qT\varepsilon T}{2(1-qT)} > S_2 + F_2 \quad (4)$$

aby zapewnić istnienie ruchu quasi-ślizgowego.

Reguły opracowane w artykule [7] są często stosowane w aktualnych pracach w postaci oryginalnej [10], [11] oraz zmodyfikowanej [8], [9], [12], [13], [14], [15], [16].

W referacie [10] przeanalizowany został problem sterowania fragmentem struktury złożonej z tzw. inteligentnych materiałów, które składają się z warstwy nośnej, na którą nałożone zostają warstwy czujników i siłowników. W takich układach najważniejsze jest tłumienie oscylacji zbliżonych do częstotliwości drgań własnych (najczęściej kilku różnych)

struktury. Z tego powodu, zaproponowano zmodyfikowany kwadratowy wskaźnik jakości sterowania. Na jego wartość oscylacje zbliżone do pewnych częstotliwości, mają większy wpływ niż oscylacje o innych częstotliwościach. Aby zaprojektować regulator optymalizujący ten wskaźnik, konieczne jest rozszerzenie przestrzeni stanu o dodatkowe zmienne, będące wyjściami filtrów pasmowo przepustowych. Do takiego „rozszerzonego” układu dobierana jest następnie płaszczyzna ślizgowa minimalizująca „klasyczny” kwadratowy wskaźnik jakości, z odpowiednio większymi wagami dla sygnałów wyjściowych filtrów. Dodatkowo, ponieważ w takich układach zmienne stanu (zniekształcenia elementów) są trudne do pomiaru, wykorzystane zostało różno-okresowe sprzężenie od wyjścia, które na podstawie wyjścia układu estymuje wartości zmiennych stanu. Ostatnim krokiem, jest zaprojektowanie regulatora, zapewniającego istnienie ruchu ślizgowego. W pracy [10] w tym celu, zastosowana została reguła osiągnięcia trybu ślizgowego opracowana w artykule [7]. Wykonane zostały symulacje komputerowe oraz eksperymenty na stanowisku laboratoryjnym z wykorzystaniem opracowanego regulatora.

W pracy [11] przeanalizowano wpływ okresu dyskretyzacji na ślizgowe sterowanie układem o wielu wejściach i wielu wyjściach. Autorzy zaczęli od rozważenia sytuacji, w której każdy z elementów macierzy sprzężeń zwrotnych zmienia się między dwiema wartościami, w zależności od wartości odpowiedniej zmiennej ślizgowej. Wartości te nie mogą być zbyt małe, gdyż muszą przeciwdziałać zakłóceniom działającym na układ, ani zbyt duże, ponieważ (co nie występuje w układach ciągłych) spowodowałyby to przejście punktu opisującego na drugą stronę płaszczyzny i wzbudzenie oscylacji w układzie. Pokazano, jak zachowują się te ograniczenia, w zależności od długości okresu dyskretyzacji. Gdy ten okres dąży do zera, właściwości układu dyskretnego zbliżają się coraz bardziej do właściwości układu ciągłego, co oznacza, że jedno z ograniczeń dąży do $\pm\infty$. W miarę zwiększania okresu dyskretyzacji, ograniczenie to zbliża się do wartości drugiego, będącego głównie funkcją amplitudy zakłóceń działających na układ. Przy pewnej wartości okresu dyskretyzacji ograniczenia te stają się sobie równe, przez co niemożliwe jest zapewnienie stabilnego ruchu ślizgowego dla większych okresów dyskretyzacji. W pierwszym z zaproponowanych regulatorów, część sygnału sterującego pochodzi od liniowych sprzężeń zwrotnych, a część jest funkcją nieciągłą, zapewniającą zbieżność do płaszczyzny, pomimo działających na układ zakłóceń. Następnie, autorzy proponują rozwiązanie bazujące na regule osiągnięcia trybu ślizgowego opracowanej w artykule [7] oraz jej modyfikacji poprzez zastąpienie funkcji signum funkcją nasycenia, w celu zmniejszenia „chatteringu”. Przedstawili rezultaty symulacji komputerowych, w których porównano działanie trzech opisanych wyżej regulatorów.

W artykule [8] zaproponowano regułę osiągnięcia trybu ślizgowego, w której szybkość zbieżności zmiennej ślizgowej do zera jest opisana pewną funkcją tej zmiennej. Funkcja ta w pobliżu płaszczyzny jest liniowa, co pozwala wyeliminować „chattering”. Przeanalizowany został wpływ zakłóceń na zachowanie układu, wyznaczono rozmiar obszaru otaczającego płaszczyznę ślizgową, do którego trajektoria stanu będzie zbiegać. Jako przykład wykorzystano funkcję, która w dużej odległości od płaszczyzny odpowiada zastosowaniu reguły przedstawionej w pracy [7], a w pobliżu płaszczyzny jest proporcjonalna do wartości

zmiennej ślizgowej. Rezultaty są potwierdzone przez sterowanie położeniem wału silnika prądu stałego na stanowisku laboratoryjnym, w trakcie którego przeanalizowano również wpływ okresu dyskretyzacji na dokładność regulacji.

Rozwiązanie zaproponowane w artykule [8] zostało rozbudowane w pracy [12] poprzez wprowadzenie dodatkowego integratora w kanale zmiennej ślizgowej. Dzięki temu, otrzymany regulator umożliwia podążanie za trajektorią paraboliczną dla serwomechanizmu z napędem DC. Aby uniknąć nasycania się integratora (znanego jako efekt wind-up), jego działanie jest włączane dopiero w bliskim otoczeniu płaszczyzny ślizgowej. Dodatkowo, przez odpowiednią kompensację zakłócenia sprzężeniem w przód (ang. feedforward), możliwe jest wierne odtwarzanie trajektorii trzeciego rzędu (zależącej od trzeciej potęgi czasu). Autorzy wyznaczają analitycznie uchyb w stanie ustalonym i porównują go do otrzymanego w podstawowym algorytmie przedstawionym w pracy [8].

W pracy [9] autorzy projektują ślizgowy regulator stabilizujący napięcie w sieciach prądu stałego. Rozważone jest bezpośrednie zastosowanie reguły zaproponowanej w artykule [7], jednak prowadziłyby ono do nadmiernego „chatteringu”. Z tego powodu, zostaje wprowadzona modyfikacja działania tej reguły w pobliżu płaszczyzny ślizgowej. Gdy wartość bezwzględna zmiennej ślizgowej spadnie poniżej pewnej wartości granicznej, stała wartość parametru ε w równaniu (2) zostaje zastąpiona wyrazem $\beta|s(kT)|^\lambda$ gdzie β i λ reprezentują stałe parametry. Ponieważ wyraz ten maleje w miarę zbliżania się do płaszczyzny, zmiana ta powoduje wyraźnie zmniejszenie „chatteringu”. Autorzy pokazują, że w przypadku braku zakłóceń zapewniony jest ruch quasi-ślizgowy zdefiniowany w artykule [7]. Ponadto, ponieważ większość fazy osiągnięcia trybu ślizgowego ma miejsce poza pasmem granicznym, zaproponowana modyfikacja nie wydłuża znacząco czasu zbieżności do płaszczyzny. Przedstawione zostały wyniki symulacji komputerowych oraz eksperymentów na stanowisku laboratoryjnym z zastosowaniem opracowanego regulatora ślizgowego.

W pracy [14] zaproponowano następującą regułę osiągnięcia trybu ślizgowego

$$s[(k+1)T] - s(kT) = -qTs(kT) - \frac{|s(kT)|}{\rho} T \operatorname{sgn}[s(kT)]. \quad (5)$$

Stała wartość ε w artykule [7] została tutaj zastąpiona przez wyrażenie $|s(kT)|/p$. Wzór (5) jest jednak niepotrzebnie skomplikowany, ponieważ jego prawą stronę można zapisać jako $-(q + 1/p)Ts(kT)$. Oznacza to, że nie ma potrzeby wybierania niezależnie dwóch parametrów q i p , ponieważ na działanie układu będzie miała wpływ tylko wartość $(q + 1/p)$. Można więc rozważyć równanie (5) jako regułę opracowaną w artykule [7], w której wybieramy $\varepsilon = 0$ i dopuszczamy możliwość $qT > 1$. Autorzy porównują działanie regulatora zapewniającego przebieg zmiennej ślizgowej (5) oraz regulatora zaproponowanego w pracy [7], metodą symulacji komputerowych.

W pracy [15] autorzy rozważają sterowanie silnikiem indukcyjnym, zakładając, że pozycja wirnika jest odczytywana za pomocą enkodera, a na podstawie tego pomiaru prędkość obrotowa jest estymowana metodą Eulera. Proponują oni regułę osiągnięcia trybu

ślizgowej, która rozdziela przestrzeń stanu na dwa obszary. W pierwszym z nich, do którego należą punkty leżące od płaszczyzny dalej niż pewna wartość progowa, wymagana prędkość zmian jest duża, a w pobliżu płaszczyzny mała. Odpowiada to regule (2) przy wyborze $q = 0$ i przełączaniu parametru ε między dwiema wartościami, w zależności od modułu zmiennej ślizgowej. Dzięki temu, możliwe jest zapewnienie krótkiego czasu zbieżności, otrzymanego dzięki większej wartości ε , przy jednoczesnym ograniczeniu zjawiska „chatteringu”, ponieważ w okolicy płaszczyzny wartość ε zostaje zmniejszona. Wyniki teoretyczne zostały zweryfikowane badaniami na stanowisku laboratoryjnym.

W artykule [16] zaproponowano regułę osiągnięcia trybu ślizgowego zawierającą dwie funkcje potęgowe:

$$s[(k-1)T] - s(kT) = -qTs(kT) - \varepsilon_1 T |s(kT)|^\alpha \operatorname{sgn}[s(kT)] - \varepsilon_2 T |s(kT)|^\beta \operatorname{sgn}[s(kT)], \quad (6)$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ oznaczają dodatnie parametry, $q \in (0, 1/T)$, $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 1$. Dzięki takiej konstrukcji, powyższe równanie, w zależności od wartości zmiennej ślizgowej, przechodzi płynnie między dwiema różnymi regułami potęgowymi. Kiedy $|s(kT)| < 1$, dominuje wyraz zawierający parametr α , a gdy $|s(kT)| > 1$, większe wartości przyjmuje wyrażenie zawierające β . Dodatkowo, parametr q , który we wszystkich opisanych wyżej regułach był stały, może przyjmować dwie różne wartości dla $|s(kT)| > 1$ i $|s(kT)| < 1$. Można na to rozwiązanie spojrzeć, jako na bardziej złożoną wersję reguły zaproponowanej w pracy [9]. Różnicą jest to, że przełączanie między dwiema różnymi szybkościami zbieżności jest bardziej płynne. Ponadto w pracy [9] w jednym z obszarów funkcja potęgowa była zastępowana stałą wartością. Autorzy udowodnili, że wykorzystanie zależności (6) zapewnia istnienie ruchu ślizgowego, w przypadku braku zakłóceń. Następnie, przeanalizowany został czas trwania obu fragmentów osiągnięcia trybu ślizgowego, od warunków początkowych do okolicy $s(kT) = 0$ i drugi, od tej okolicy do zera. Aby możliwe było zastosowanie tej reguły dla rzeczywistych układów, autorzy pracy [16] rozbudowali ją o sieć neuronową, służącą do estymowania wartości zakłócenia. Wykonane zostały symulacje komputerowe pokazujące zalety tego rozwiązania. Porównane w nich zostały cztery reguły: reguła (2), reguła zawierająca jedną funkcję potęgową (czyli wzór (6) przy przyjęciu $\varepsilon_2 = 0$) oraz reguła (6) w wersji podstawowej oraz rozbudowanej o estymację zakłóceń.

W pracy [13] zastosowana została reguła opracowana w artykule [7], dodatkowo rozszerzona o kompensację zakłóceń. Kompensacja ta bazuje na założeniu ograniczonej szybkości zmian zakłócenia. Autorzy złagodzili warunek mówiący o tym, że punkt opisujący musi przekraczać płaszczyznę w każdym kroku sterowania. Zamiast tego, podali górne ograniczenie czasu, który może upłynąć między kolejnymi przejściami przez płaszczyznę. Te zmiany, w porównaniu do rozwiązania przedstawionego w artykule [7], pozwoliły na uzyskanie węższego pasma ruchu quasi-ślizgowego, co bezpośrednio przekłada się na większą odporność układu na zakłócenia. Zostało to zweryfikowane na drodze symulacji komputerowych.

Jako punkt odniesienia do regulatorów zaprojektowanych z wykorzystaniem reguł osiągnięcia trybu ślizgowego opracowanych w rozprawie wykorzystany został regulator dead-beat. Ma on za zadanie sprowadzić stan układu do otoczenia płaszczyzny ślizgowej w pojedynczym kroku. Oznacza to konieczność spełnienia wzoru

$$s[(k+1)T] = -\tilde{F}(kT) - \tilde{S}(kT). \quad (7)$$

Sygnał sterujący zapewniający taki przebieg zmiennej ślizgowej dany jest wzorem

$$u(kT) = (\mathbf{c}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{c}^T [\mathbf{x}_d - \mathbf{A}\mathbf{x}(kT)]. \quad (8)$$

Zastosowanie tego typu regulatora zapewnia bardzo dobrą dynamikę układu zamkniętego, lecz wymaga nadmiernej wartości sygnału sterującego pierwszej chwili dyskretyzacji. Właśnie z tego powodu w pracy [7] zaproponowano definicję przełączającego ruchu quasi-ślizgowego, którą przedstawiono wcześniej.

5. Reguły przełączające

Wyraz ε w regule zaproponowanej w pracy [7] zwiększa występujący w układzie „chattering”. Powinien więc być wybrany jako najmniejszy, spełniający warunek (4). Ze wzorów (2), (3) widać, że z tego powodu wyznaczona prędkość zmian s będzie w przybliżeniu proporcjonalna do wartości tej zmiennej. Oznacza to, że w przypadku dużej wartości zmiennej s , występującej kiedy stan początkowy leży daleko od płaszczyzny przełączeń, wymagana szybkość zbieżności zmiennej przełączającej jest bardzo duża. To z kolei przekłada się na generowanie wysokiej wartości sygnału sterującego. Z drugiej strony, pod koniec fazy osiągnięcia trybu ślizgowego, szybkość zbieżności wyznaczona w tym podejściu jest bardzo mała. Powoduje to niepotrzebne wydłużenie fazy osiągnięcia trybu ślizgowego i zmniejszenie odporności układu na zakłócenia. W trakcie doboru parametrów regulatora zaprojektowanego zgodnie z tą regułą, należy więc znaleźć kompromis między generowaniem dopuszczalnej wartości sygnału sterującego na początku procesu sterowania i szybkością zmian zmiennej przełączającej, gdy jest już ona bliska zeru.

Z tego powodu w rozprawie, zmodyfikowałem regułę osiągnięcia trybu ślizgowego opracowaną w artykule [7], tak aby wymagana szybkość zmian zmiennej ślizgowej (a więc również generowany sygnał sterujący) nie była proporcjonalna do wartości tej zmiennej, lecz związana z nią jedną z trzech wybranych funkcji nieliniowych.

Opracowane reguły przełączające to:

1) Reguła podstawowa, dana wzorem

$$s[(k+1)T] = \{1 - q[s(kT)]\}s(kT) - \varepsilon \operatorname{sgn}[s(kT)] + \\ -\tilde{S}(kT) - \tilde{F}(kT) + S_1 + F_1 - (S_2 + F_2) \operatorname{sgn}[s(kT)], \quad (9)$$

gdzie

$$q[s(kT)] = \frac{s_0}{|s(kT)| + s_0}. \quad (10)$$

2) Reguła zawierająca funkcję arctg()

$$s[(k+1)T] = s(kT) - g \arctg[s(kT)/g] + S_1 + F_1 + \\ -(\varepsilon + S_2 + F_2) \operatorname{sgn}[s(kT)] - \tilde{S}(kT) - \tilde{F}(kT), \quad (11)$$

3) Reguła zawierająca funkcję tanh(), opisana równaniem

$$s[(k+1)T] = s(kT) - r \tanh\left[\frac{s(kT)}{r}\right] - (\varepsilon + F_2 + S_2) \operatorname{sgn}[s(kT)] - \tilde{F}(kT) - \tilde{S}(kT) + F_1 + S_1, \quad (12)$$

Otrzymane rezultaty są dokładnie opisane w rozdziale 3 rozprawy. Wartości bezwzględne wybranych funkcji są ograniczone, dzięki czemu dla dowolnie dużej wartości początkowej zmiennej ślizgowej można zapewnić znane z góry ograniczenie szybkości jej zmian. Ponadto, funkcje te maleją bardzo wolno dla niewielkich wartości tej zmiennej. Oznacza to, utrzymanie wyraźnego wpływu sygnału sterującego, nawet w pobliżu płaszczyzny ślizgowej. W mojej pracy udowodniłem, że opracowane reguły osiągnięcia trybu ślizgowego umożliwiają szybszą zbieżność i większą odporność na zakłócenia od rozwiązań znanych w literaturze, przy założeniu ograniczenia do tej samej maksymalnej wartości sygnału sterującego. Wybór pomiędzy jednym z trzech opracowanych predefiniowanych przebiegów zmiennej ślizgowej jest uzależniony od wymagań danego systemu co do odporności na zakłócenia i ograniczeń nałożonych na zmienne stanu oraz szybkość zmian sygnału sterującego.

6. Reguły nieprzełączające

W pracy [7] przyjęto, że w trakcie ruchu ślizgowego, punkt opisujący powinien przekraczać płaszczyznę ślizgową w każdym okresie dyskretyzacji. W dalszej modyfikacji postanowiłem, podobnie jak w pracach [1], [3], pominąć ten warunek, wymagając jedynie, aby punkt opisujący pozostawał w pewnym, z góry określonym, otoczeniu płaszczyzny ślizgowej. Zmiana ta pozwoliła na wyeliminowanie oscylacji w trakcie ruchu ślizgowego. Opracowane zostały następujące trzy reguły nieprzełączające

1) Reguła podstawowa, opisana wzorem

$$s[(k+1)T] = \{ 1 - q[s(kT)] \} s(kT) - \tilde{S}(kT) - \tilde{F}(kT) + F_1 + S_1, \quad (13)$$

gdzie $q[s(kT)]$ dane jest zależnością (10).

2) Reguła zawierająca funkcję arctg()

$$s[(k+1)T] = s(kT) - g \arctg\left[\frac{s(kT)}{g}\right] - \tilde{S}(kT) - \tilde{F}(kT) + F_1 + S_1, \quad (14)$$

3) Reguła zawierająca funkcję $\tanh()$, dana równaniem

$$s[(k+1)T] = s(kT) - r \tanh\left[\frac{s(kT)}{r}\right] - \tilde{F}(kT) - \tilde{S}(kT) + F_1 + S_1. \quad (15)$$

Dla każdej z nich wyznaczono rozmiar otoczenia płaszczyzny ślizgowej, do którego punkt opisujący będzie zbiegał, a po jego osiągnięciu pozostanie w tym otoczeniu. Rezultaty są podsumowane w Tabeli 1.

7. Porównanie właściwości opracowanych reguł

W pracy dla każdej z reguł wyznaczono szerokość pasma quasi-ślizgowego, zapewnioną przy jej zastosowaniu. Szerokość ta jest jednoznacznie powiązana z odpornością układu zamkniętego na zakłócenia. W miarę zmniejszania tej szerokości ruch quasi-ślizgowy jest coraz bardziej zbliżony do idealnego ruchu ślizgowego, co oznacza coraz większą odporność. Ponadto, wykazano, że każda z opracowanych reguł (w przeciwieństwie do ślizgowego regulatora typu dead beat oraz reguły Gao i współautorów) zapewnia ograniczenie prędkości zmian $s(kT)$, niezależne od warunków początkowych. Jest to istotne, ponieważ w większości układów dynamicznych wymaganie szybkich zmian zmiennej ślizgowej przekłada się na konieczność stosowania dużego sygnału sterującego. Otrzymane rezultaty zostały podsumowane w Tabeli 1. Jak można zauważyć, wszystkie reguły przełączające zapewniają szerokość pasma quasi-ślizgowego daną tym samym wyrażeniem. Jednak zastosowanie reguł opracowanych w rozprawie pozwala na wybór mniejszej wartości parametru ε (co zostało przedstawione w rozdziale 6 pracy) przy tym samym ograniczeniu wartości sygnału sterującego. Oznacza to otrzymanie większej odporności na zakłócenia zaproponowanych rozwiązań.

Tabela 1. Podsumowanie właściwości zaproponowanych reguł osiągnięcia trybu ślizgowego

	Reguła	Szerokość pasma quasi-ślizgowego	Maks. szybkość zmian s
	Regulator dead-beat	$S_2 + F_2$	$s(0)$
Przełączające	Reguła Gao i współautorów	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2$	Proporcjonalna do $s(0)$
	Podstawowa	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2$	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2 + s_0$
	Z funkcją $\text{artg}(\cdot)$	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2$	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2 + (g\pi/2)$
	Z funkcją $\tanh(\cdot)$	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2$	$\varepsilon + 2S_2 + 2F_2 + r$
Nieprzełączające	Podstawowa	$s_0(S_2 + F_2)/[s_0 - (S_2 + F_2)]$	$2S_2 + 2F_2 + s_0$
	Z funkcją $\text{artg}(\cdot)$	$g\text{tg}[(S_2 + F_2)/g]$	$2S_2 + 2F_2 + (g\pi/2)$
	Z funkcją $\tanh(\cdot)$	$r[\ln(r + S_2 + F_2) - \ln(r - S_2 - F_2)]/2$	$2S_2 + 2F_2 + r$

8. System logistyczny

W pracy, jako przykład zastosowania opracowanych dyskretnych regulatorów ślizgowych wykorzystany został system logistyczny. Poniżej przedstawiony zostanie jego model.

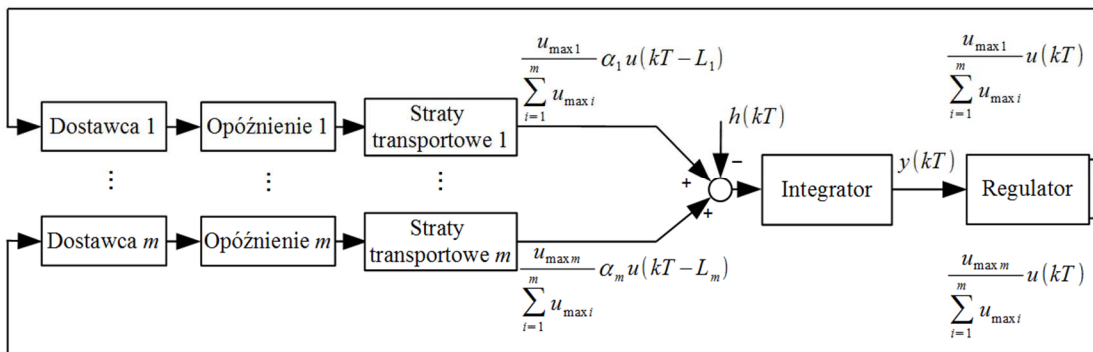
Analizowany układ logistyczny składa się z pojedynczego magazynu, oferującego towary klientom. Magazyn jest uzupełniany transportami towarów od m odległych dostawców. Każde połączenie między dostawcą p a magazynem jest scharakteryzowane przez współczynnik strat α_p (każde $\alpha_p \in (0, 1]$) oraz opóźnienie L_p związane z czasem pakowania i transportu. Ponadto, każdy z dostawców może wysłać maksymalnie $u_{\max p}$ towarów w czasie jednego okresu dyskretyzacji.

Regulator, stanowiący element strategii zarządzania magazynem, ma za zadanie wygenerowanie zamówień. Jego sygnał wyjściowy u określa sumę ilości towarów zamówionych u wszystkich dostawców. Ta wartość jest dzielona pomiędzy dostawców, proporcjonalnie do ich możliwości, tzn. każdy dostawca p otrzymuje zamówienie na $u \cdot u_{\max p} / \sum_{i=1}^m u_{\max i}$ towarów. Schemat blokowy układu przedstawiony jest na rysunku 1. Założono, że każde opóźnienie L_p jest wielokrotnością okresu dyskretyzacji T , tzn. $L_p = \mu_p T$, gdzie μ_p jest liczbą naturalną. Zapotrzebowanie klientów na towar modelowane jest jako *a priori* nieznaną funkcją czasu $d(kT)$. Tylko maksymalna wartość tej funkcji, oznaczona przez d_{\max} , znana jest z góry. Ponieważ ilość towarów w magazynie, oznaczona jako $y(kT)$, może być niewystarczająca do pełnego zaspokojenia zapotrzebowania na towar, wprowadzona zostaje dodatkowa funkcja $h(kT)$ odpowiadająca ilości sprzedanych towarów. Zatem, dla dowolnego $k \geq 0$

$$0 \leq h(kT) \leq d(kT) \leq d_{\max}. \quad (16)$$

Pierwsze zamówienie jest generowane w chwili $kT=0$, a magazyn jest pusty przed początkiem procesu sterowania, tzn. $u(kT < 0) = 0$ i $y(kT < 0) = 0$. Ilość towaru w magazynie może zostać wyrażona w postaci różnicy między ilością dostarczonych i sprzedanych towarów

$$y(kT) = \sum_{p=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_{\max p}}{\sum_{i=1}^m u_{\max i}} \alpha_p u(jT - L_p) - \sum_{j=0}^{k-1} h(jT). \quad (17)$$



Rys.1 Schemat blokowy układu logistycznego

W celu uproszczenia zapisu, dostawcy o tych samych opóźnieniach zostaną zastąpieni przez pojedynczego zastępczego dostawcę. Ilość towarów dostarczona do magazynu od tego dostawcy będzie równa $a_i u$, gdzie parametr a_i dany jest wzorem

$$a_i = \sum_{p: \mu_p=i} \alpha_p u_{\max p} / \sum_{i=1}^m u_{\max i}, \quad (18)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n-1$, przy czym $n = \max(\mu_p) + 1$. Jeżeli nie ma dostawców, których opóźnienie wynosi iT , to odpowiadający im współczynnik a_i jest równy zero. Po tym przekształceniu, ilość towaru w magazynie może zostać wyrażona następująco

$$y(kT) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} a_i u[(j-i)T] - \sum_{j=0}^{k-1} h(jT) \quad (19)$$

W celu zaprojektowania regulatora powyższe równanie należy zapisać w przestrzeni stanów

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}u(kT) + \mathbf{o}h(kT) \\ y(kT) &= \mathbf{p}^T \mathbf{x}(kT), \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie \mathbf{A} reprezentuje macierz stanu o wymiarach $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

a \mathbf{b} , \mathbf{o} i \mathbf{p} oznaczają następujące wektory o wymiarach $n \times 1$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Pierwszy element wektora stanu $x_1(kT) = y(kT)$ odzwierciedla ilość towaru w magazynie, a pozostałe elementy tego wektora reprezentują opóźnione wartości sygnału sterującego

$$x_i(kT) = u[(k-n+i-1)T]. \quad (23)$$

Przyjmujemy, że w stanie zadanym $\mathbf{x}_d = [y_d \ 0 \ \dots \ 0]$, tj. ilość towarów w magazynie jest równa wartości zadanej y_d , i nie ma żadnych nadchodzących transportów.

W pracy wyznaczyłem wartość sygnałów sterujących otrzymanych przy zastosowaniu każdej z zaproponowanych reguł. Wyniki są podsumowane w Tabeli 2. Można zauważyć, że w przeciwieństwie do regulatora dead-beat i reguły Gao i współautorów każda

z opracowanych reguł zapewnia górne ograniczenie sygnału sterującego, niezależne od warunków początkowych. Wartości tych ograniczeń zostały przedstawione w Tabeli 3.

Tabela 2. Sygnały sterujące wyznaczone przy zastosowaniu zaproponowanych w rozprawie reguł osiągnięcia trybu ślizgowego, dla układów logistycznych

	Reguła	Sygnał sterujący $u(kT)$
	Regulator dead-beat	$s(kT)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
Przełączające	Reguła Gao i współautorów	$\{qs(kT) + (\varepsilon + d_{\max}/2)\text{sgn}[s(kT)] + d_{\max}/2\}/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Podstawowa	$\{s_0 s(kT)/(s_0 + s(kT)) + (\varepsilon + d_{\max}/2)\text{sgn}[s(kT)] + d_{\max}/2\}/\sum_{i=1}^{n-1} a_i$
	Z funkcją arctg(.)	$\{g \arctg[s(kT)/g] + (\varepsilon + d_{\max}/2)\text{sgn}[s(kT)] + d_{\max}/2\}/\sum_{i=1}^{n-1} a_i$
	Z funkcją tanh(.)	$\{r \tanh[s(kT)/r] + (\varepsilon + d_{\max}/2)\text{sgn}[s(kT)] + d_{\max}/2\}/\sum_{i=1}^{n-1} a_i$
Nieprzełączające	Podstawowa	$\{q[s(kT)]s(kT) + d_{\max}/2\}/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Z funkcją arctg(.)	$\{g \arctg[s(kT)/g] + d_{\max}/2\}/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Z funkcją tanh(.)	$\{r \tanh[s(kT)/r] + d_{\max}/2\}/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$

Tabela 3. Wartość sygnału sterującego dla $s \rightarrow \infty$

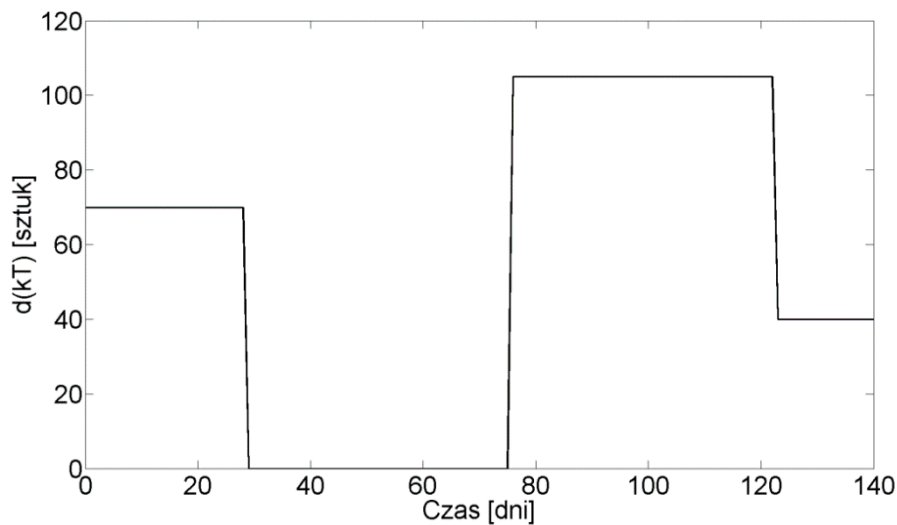
	Reguła	wartość $u(kT)$ gdy $s \rightarrow \infty$
	Regulator dead-beat	∞
Przełączające	Reguła Gao i współautorów	∞
	Podstawowa	$(d_{\max} + \varepsilon + s_0)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Z funkcją artg(.)	$(d_{\max} + \varepsilon + g\pi/2)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Z funkcją tanh(.)	$(d_{\max} + \varepsilon + r)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
Nieprzełączające	Podstawowa	$(s_0 + d_{\max}/2)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Z funkcją artg(.)	$(g\pi/2 + d_{\max}/2)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$
	Z funkcją tanh(.)	$(r + d_{\max}/2)/\sum_{j=1}^{n-1} a_j$

Rezultaty symulacji

Działanie regulatorów bazujących na opracowanych regułach osiągnięcia trybu ślizgowego, zostało w rozprawie zilustrowane symulacjami komputerowymi układu opisanego równaniem (20). W analizowanym przypadku wybrany zostaje okres dyskretyzacji $T=1$ dzień. Parametry układu badanego symulacyjnie przedstawione są w Tabeli 4. Jak widać z tabeli, dostawcy mogą w sumie wysłać 125 sztuk towaru w pojedynczym okresie dyskretyzacji. Oznacza to, że sygnał sterujący nie powinien przekroczyć tej wartości. Największym opóźnieniem jest $\mu_3 T=9$ dni, zatem stopień układu $n=10$. Parametry a_i wynikające z danych zawartych w tabeli, przyjmują następujące wartości $a_4=0,196$, $a_6=0,304$, $a_9=0,4608$, a pozostałe są równe zero. Największa możliwa wartość popytu na towar to $d_{\max}=105$ sztuk. Przebieg popytu przyjętego w symulacjach jest przedstawiony na rysunku 2.

Tabela 4. Parametry układu

p	$u_{\max p}$ [sztuk]	a_p	L_p [dni]
1	25	0.98	4
2	40	0.95	6
3	60	0.96	9



Rys. 2. Zapotrzebowanie klientów na towar.

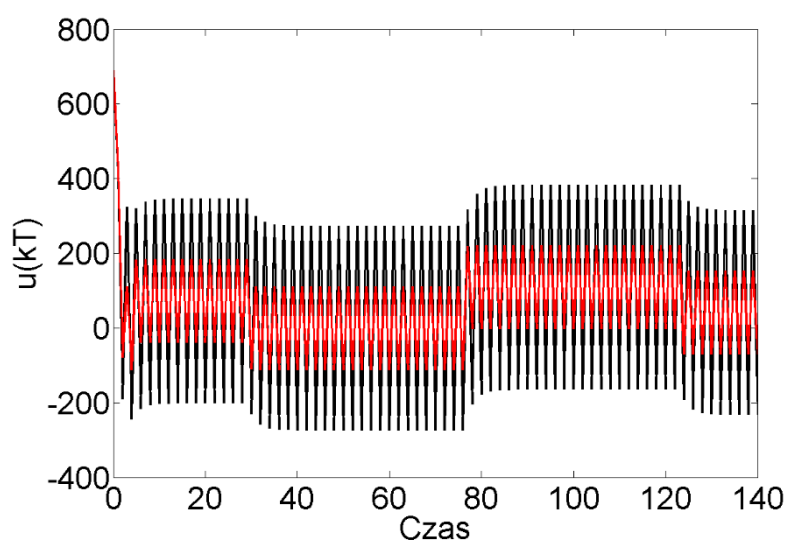
10. Zastosowanie reguł przełączających

W pracy wykazano, że dla układu (20), wykorzystanie przełączających reguł osiągnięcia trybu ślizgowego będzie prowadziło do wygenerowania ujemnego sygnału sterującego, co uniemożliwia ich zastosowanie dla systemu logistycznego. Model w przestrzeni stanów wyrażony wzorem (20) może jednak przedstawiać również inne obiekty dynamiczne, dla których generowanie ujemnych wartości sygnału sterującego jest dopuszczalne. Zatem, aby móc porównać działanie regulatorów ślizgowych zaprojektowanych z zastosowaniem obu typów reguł, symulacje komputerowe zostaną wykonane również dla przełączających reguł osiągnięcia trybu ślizgowego. Ponieważ rozważany poniżej jest obiekt dynamiczny opisany równaniem (20), lecz nie będący układem logistycznym, parametry regulatorów będą podane

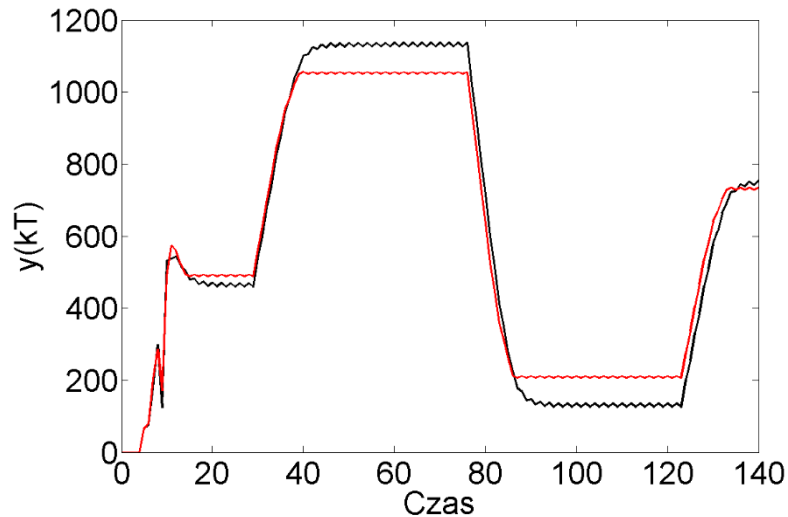
jako bezwymiarowe. Zadaniem każdego z regulatorów jest utrzymanie wyjścia układu na stałym poziomie $y_d = 1000$, przy ograniczeniu sygnału sterującego do wartości 690. Dla każdej z rozważonych reguł dokonano wyboru wartości parametrów zapewniających najmniejszy poziom chatteringu. Sposób doboru został dokładnie wyjaśniony w pracy, wybrane wartości parametrów przedstawiono w Tabeli 5. Jak można zauważyć, reguły opracowane w pracy pozwalają na wybranie znacznie mniejszych wartości nieciągłej części sygnału sterującego. Na rysunkach 3, 4 i 5 przedstawiono porównanie rezultatów otrzymanych przy zastosowaniu reguły Gao i współautorów oraz reguły z funkcją $\tanh(\cdot)$. Jak widać z rysunku 3, odpowiedni wybór parametrów obu reguł pozwolił na ograniczenie sygnału sterującego do zadanego poziomu 690. Ponadto, sygnał sterujący otrzymany przy zastosowaniu zaproponowanego rozwiązania wykazuje wyraźnie mniejsze oscylacje. Jak widać na rysunku 4, skutkuje to zmniejszeniem oscylacji wyjścia. Ponadto, zastosowane rozwiązanie pozwala utrzymać wartość wyjściową bliżej wartości zadanej. Jak widać na rysunku 5 obie reguły zapewniają istnienie przełączającego ruchu quasi-ślizgowego (zmienna ślizgowa zmienia znak w każdym kolejnym okresie dyskretyzacji). Zaproponowana w rozprawie reguła zapewnia mniejszą szerokość pasma quasi-ślizgowego, co oznacza otrzymanie większej odporności na zakłócenia.

Tabela 5. Parametry reguł przełączających wybrane do symulacji

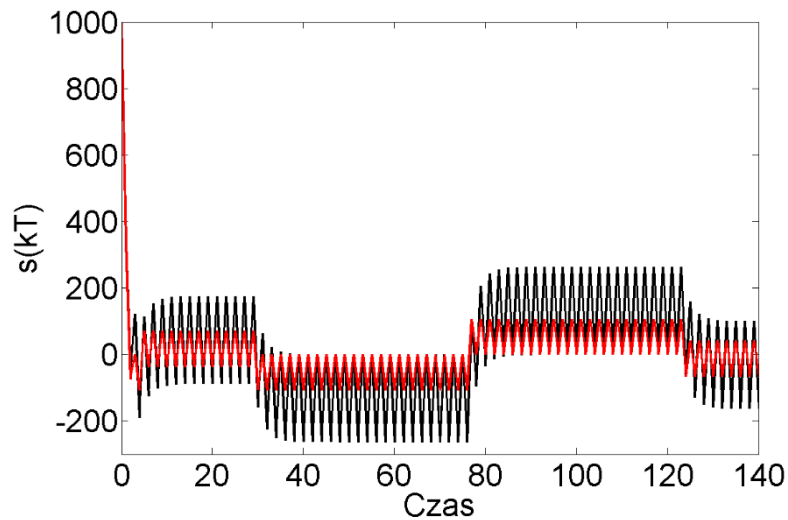
Reguła	Parametry
Reguła Gao i wsp.	$q = 0,4 \quad \varepsilon = 158$
Podstawowa	$s_0 = 1210 \quad \varepsilon = 10,44$
Z funkcją $\text{artg}(\cdot)$	$g = 500 \quad \varepsilon = 4,38$
Z funkcją $\tanh(\cdot)$	$r = 597 \quad \varepsilon = 1,42$



Rys. 3. Sygnał sterujący otrzymany przy zastosowaniu reguły opracowanej w artykule [7] (czarny) i zaproponowanej w rozprawie reguły z funkcją $\tanh(\cdot)$ (czerwony).



Rys. 4. Przebieg wyjścia układu otrzymany przy zastosowaniu reguły opracowanej w artykule [7] (czarny) i zaproponowanej w rozprawie reguły z funkcją tanh(.) (czerwony).



Rys. 5. Przebieg zmiennej ślizgowej otrzymany przy zastosowaniu reguły opracowanej w artykule [7] (czarny) i zaproponowanej w rozprawie reguły z funkcją tanh(.) (czerwony).

11. Zastosowanie reguł nieprzełączających

Następnie, w rozprawie przeanalizowane zostało zastosowanie regulatora dead-beat oraz trzech regulatorów zaprojektowanych zgodnie z nieprzełączającymi regułami osiągnięcia trybu ślizgowego do systemu logistycznego. Dla każdego z regulatorów wyznaczona została ilość towarów w magazynie y_{max} , która nie zostanie przekroczona. Jeżeli rozmiar magazynu zostanie wybrany jako większy bądź równy tej wartości, to uniknięte zostanie ryzyko przepełnienia magazynu i wynikająca z niego konieczność stosowania kosztownych magazynów awaryjnych. Ponadto, dla każdej z reguł wyznaczono minimalną zadaną ilość towarów y_d , przy której zapewnione zostanie pełne zaspokojenie popytu. Rezultaty zostały podsumowane w Tabeli 6. Wartości parametrów reguł, zadane ilości towarów oraz wymagany rozmiar magazynu przedstawiono w Tabeli 7.

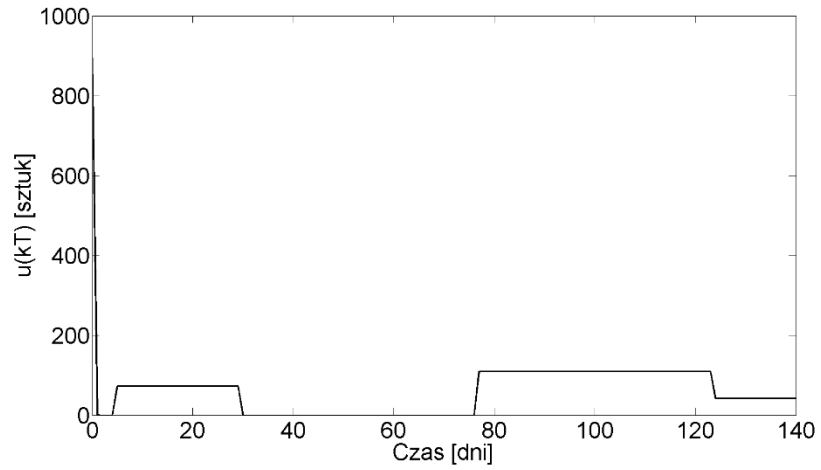
Tabela 6. Właściwości systemu logistycznego przy zastosowaniu reguł nieprzełączających

Reguła	Minimalna wartość y_d	Wymagany rozmiar magazynu
Regulator dead-beat	$d_{\max} \sum_{i=1}^{n-1} a_i (i+1) / \sum_{i=1}^{n-1} a_i$	y_d
Podstaw.	$d_{\max} \sum_{i=1}^{n-1} ia_i / \sum_{i=1}^{n-1} a_i + s_0 d_{\max} / (2s_0 - d_{\max})$	$y_d + s_0 d_{\max} / (2s_0 - d_{\max})$
Z f. artg(.)	$d_{\max} \sum_{i=1}^{n-1} ia_i / \sum_{i=1}^{n-1} a_i + g \operatorname{tg}(d_{\max} / 2g)$	$y_d + g \operatorname{tg}(d_{\max} / 2g)$
Z f. tanh(.)	$d_{\max} \sum_{i=1}^{n-1} ia_i / \sum_{i=1}^{n-1} a_i + r [\ln(r + d_{\max} / 2) - \ln(r - d_{\max} / 2)]$	$y_d + r [\ln(r + d_{\max} / 2) - \ln(r - d_{\max} / 2)]$

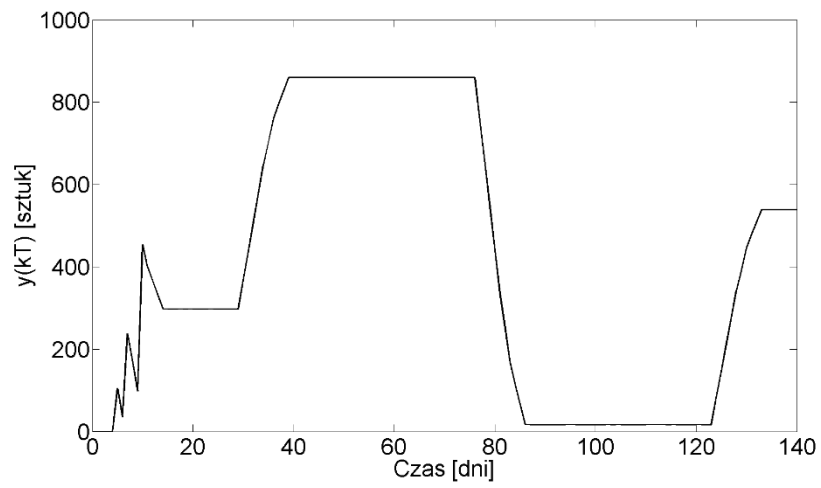
Rezultaty otrzymane dla regulatora dead-beat przedstawiono na rysunkach 6, 7 i 8. Jak widać z rysunku 7, ilość towarów w magazynie nie przekracza wartości zadanej, a po dostarczeniu pierwszej dostawy nigdy nie spada do zera. Oznacza to, że nie ma ryzyka przepełnienia magazynu, a popyt jest zaspokojony w całości. Jak można zauważyć z rysunku 8, regulator typu dead-beat zapewnia również zbieżność punktu opisującego do otoczenia płaszczyzny ślizgowej w pojedynczym okresie dyskretyzacji, a następnie pozostanie w tym otoczeniu. Na rysunku 6 można jednak zauważyć znaczącą wadę tego regulatora, czyli generowanie bardzo dużej wartości sygnału sterującego w pierwszej chwili dyskretyzacji. Porównanie wyników otrzymanych przy zastosowaniu nieprzełączających reguł osiągnięcia trybu ślizgowego pokazane zostało na rysunkach 9, 10 i 11. Jak można zauważyć, wszystkie regulatory generują zamówienia nie przekraczające możliwości dostawców. Podstawowa reguła osiągnięcia trybu ślizgowego wymaga zastosowania największego magazynu, ale zapewnia najbardziej wygładzony przebieg zamówień. Reguła bazująca na funkcji tanh(.) charakteryzuje się najmniejszym wymaganym rozmiarem magazynu, ale generuje zamówienia zmieniające się niemal równie gwałtownie jak popyt na towar. Oznacza to, że w tym przypadku niekorzystny efekt byczego bicia (ang. bullwhip effect) został tylko nieznacznie zmniejszony. Reguła zawierająca funkcję artg(.) ma właściwości pośrednie w porównaniu do powyżej wymienionych reguł. Wybór pomiędzy jedną z trzech opracowanych reguł powinien być więc podyktowany kompromisem pomiędzy kosztami magazynowania, a możliwościami realizacji przez dostawców szybko zmieniających się zamówień.

Tabela 7. Wartości parametrów wybranych do symulacji

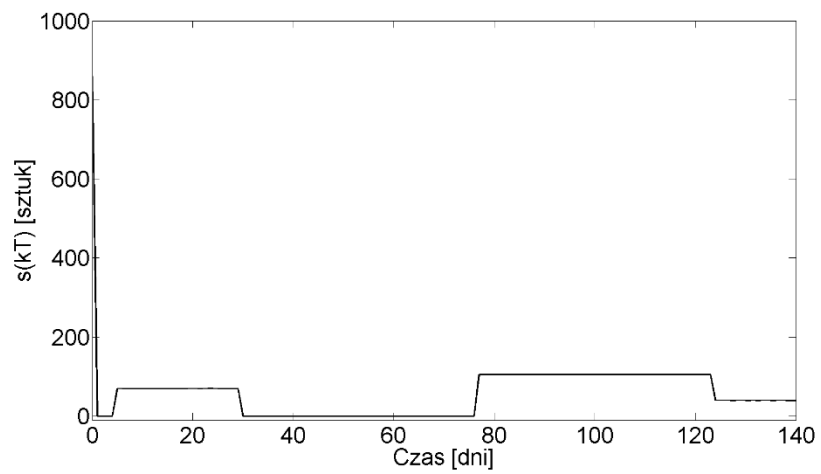
Reguła	Parametry	y_d [sztuk]	y_{\max} [sztuk]
Regulator dead-beat		850	850
Podstawowa	$s_0 = 73$	937	1124
Z funkcją artg(.)	$g = 44,59$	858	965
Z funkcją tanh(.)	$r = 67,725$	815	885



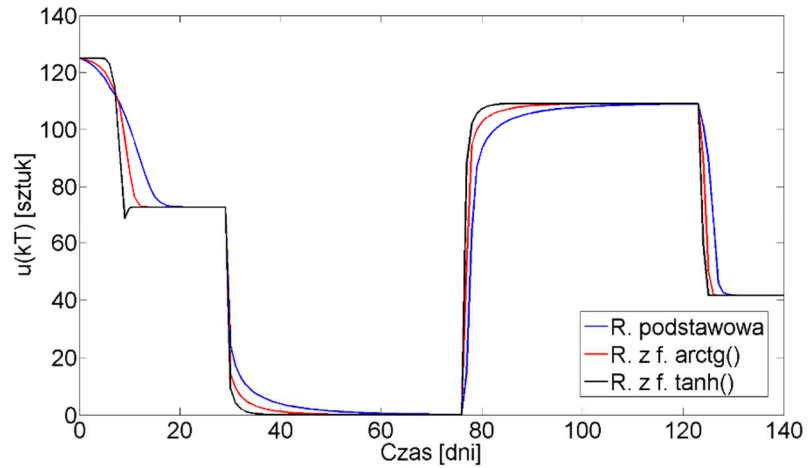
Rys. 6. Sygnał sterujący regulatora dead-beat.



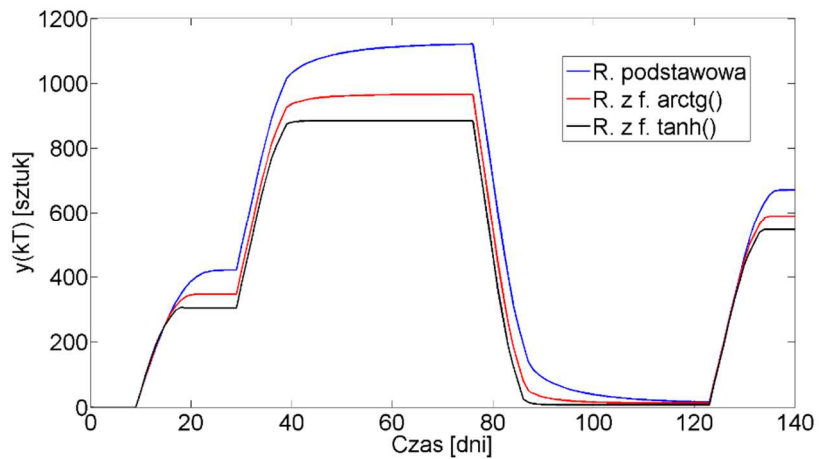
Rys. 7. Ilość towarów w magazynie przy zastosowaniu regulatora dead-beat.



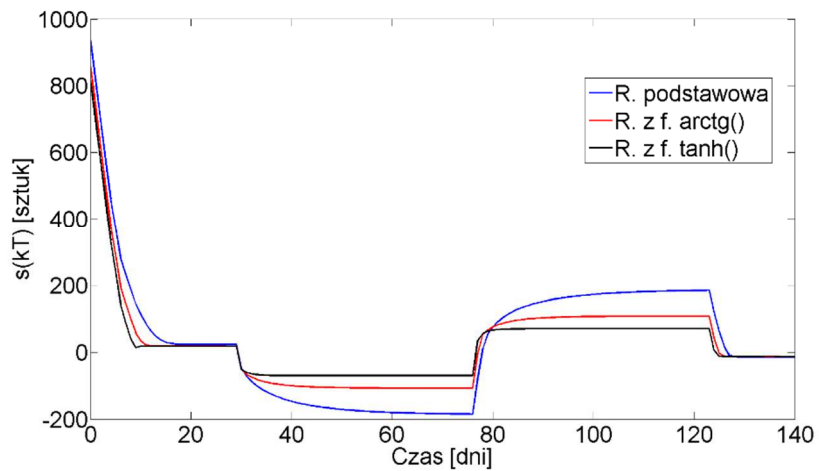
Rys. 8. Przebieg zmiennej ślizgowej otrzymany przy zastosowaniu regulatora dead-beat.



Rys. 9. Sygnał sterujący regulatorów zaprojektowanych z zastosowaniem nieprzełączających reguł osiągnięcia trybu ślizgowego.



Rys. 10. Ilość towarów w magazynie przy zastosowaniu nieprzełączających reguł osiągnięcia trybu ślizgowego.



Rys. 11. Przebieg zmiennej ślizgowej przy zastosowaniu nieprzełączających reguł osiągnięcia trybu ślizgowego.

Mimo tego, że w pracy skupiono się na konkretnym przypadku układów logistycznych, opracowane reguły osiągnięcia trybu ślizgowego mogą zostać wykorzystane dla dowolnych liniowych systemów dyskretnych, na które oddziałują zakłócenia oraz w których mogą występować niedokładności w modelowaniu.

Bibliografia

- [1] G. Bartolini, A. Ferrara i V. I. Utkin, "Adaptive sliding mode control in discrete-time systems," *Automatica*, vol. 31, nr 5, str. 769–773, 1995.
- [2] A. Bartoszewicz, "Remarks on 'Discrete-time variable structure control systems'," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 43, nr 1, str. 235–238, 1996.
- [3] A. Bartoszewicz, "Discrete time quasi-sliding mode control strategies," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, nr 4, str. 633–637, 1998.
- [4] B. Draženović, "The invariance conditions in variable structure systems," *Automatica*, vol. 5, nr 3, str. 287–295, 1969.
- [5] S. V. Emelyanov, *Variable Structure Control Systems*. Nauka, Moskwa, Rosja, 1967.
- [6] W. Gao i J. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: A new approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, nr 1, str. 45–55, 1993.
- [7] W. Gao, Y. Wang i A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, nr 2, str. 117–122, 1995.
- [8] G. Golo i Č. Milosavljević, "Robust discrete-time chattering free sliding mode control," *Systems & Control Letters*, vol. 41, nr 1, str. 19–28, 2000.
- [9] B. Liu, Z. Ding, H. Zhao i D. Jin, "Active power filter DC bus voltage piecewise reaching law variable structure control," *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 835720, 2014.
- [10] A. Mehta i B. Bandyopadhyay, "The design and implementation of output feedback based frequency shaped sliding mode controller for the smart structure," *Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, str. 353–358, 2010.
- [11] S. Mija i T. Susy, "Reaching law based sliding mode control for discrete MIMO systems," *Proc. IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, str. 1291–1296, 2010.
- [12] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić i D. Mitić, "A new design of servomechanisms with digital sliding mode," *Electrical Engineering*, vol. 89, nr 3, str. 233–244, 2007.
- [13] S. Qu, X. Xia i J. Zhang, "Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, nr 7, str. 3502–3510, 2014.
- [14] Y. Ren, Z. Liu, X. Liu i Y. Zhang "A chattering free discrete-time global sliding mode controller for optoelectronic tracking system," *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 951492, 2013.
- [15] B. Veselić, B. Peruničić-Draženović i Č. Milosavljević, "Improved discrete-time sliding-mode position control using euler velocity estimation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, nr 11, str. 3840–3847, 2010.
- [16] Y. X. Zhao, T. Wu i Y. Ma "A double power reaching law of sliding mode control based on neural network," *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 408272, 2013.